

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $A = \{3, 4, 5, 6\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 3)$ și M , mijlocul segmentului AB . Arătați că segmentele MO și MC au lungimile egale.
- 5p** 6. Se consideră $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Demonstrați că $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$, pentru orice număr real a .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$.
- 5p** a) Arătați că $0 \circ 2 = 12$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $(2x) \circ x = -1$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi, cu $m < n$, pentru care $m \circ n = 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $|f(x) - f(y)| \leq 1$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$.
- 5p** c) Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f .

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 4 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 3 =$ $= 4 - 3 = 1$	3p 2p
2.	$5a - 3 = 2a + 3$ $a = 2$	3p 2p
3.	$2^{2x+4} = 2^0$, de unde obținem $2x + 4 = 0$ $x = -2$	3p 2p
4.	Cifra zecilor se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $4 \cdot 3 = 12$ numere	2p 3p
5.	$M(2,1)$, de unde obținem $MO = \sqrt{5}$ $MC = \sqrt{5}$, deci $MO = MC$	3p 2p
6.	$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 =$ $= 3 - 2 = 1$	3p 2p
b)	$A(a) - A(0) = \begin{pmatrix} a & -2a \\ -a & 3a \end{pmatrix}$ $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aI_2$, pentru orice număr real a	2p 3p
c)	$A(a^2) = \begin{pmatrix} 3+a^2 & 2-2a^2 \\ 1-a^2 & 1+3a^2 \end{pmatrix}$, $A(a^2) - aA(a) = \begin{pmatrix} 3-3a & 2-2a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$ $\det(A(a^2) - aA(a)) = 3(1-a)^2 - 2(1-a)^2 = (1-a)^2 \geq 0$, pentru orice număr real a	2p 3p
2.a)	$0 \circ 2 = 0^2 - 4 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 =$ $= 0 - 0 + 12 = 12$	3p 2p
b)	$(2x) \circ x = -x^2$, pentru orice număr real x $-x^2 = -1$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 1$	2p 3p

c)	$m \circ n = m^2 - mn - 3mn + 3n^2 = (m-n)(m-3n)$, pentru orice numere întregi m și n	2p
	$(m-n)(m-3n) = 3$ și, cum m și n sunt numere întregi cu $m < n$, obținem perechile $(-4, -1)$ și $(0, 1)$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{4x^2 - (4x-4) \cdot 2x}{x^4} =$	3p
	$= \frac{4x(2-x)}{x^4} = \frac{4(2-x)}{x^3}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{4x-4}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} \right) = 5$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 5$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; pentru orice $x \in [1, 2]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, 2]$ și pentru orice $x \in [2, +\infty)$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[2, +\infty)$	2p
	$f(1) = 5$, $f(2) = 6$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$, deci $5 \leq f(x) \leq 6$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, de unde obținem $ f(x) - f(y) \leq 1$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = \int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big _1^2 =$	3p
	$= 8 - 1 = 7$	2p
b)	$\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = \int_1^e 4x \ln x dx = \int_1^e (2x^2)' \ln x dx = 2x^2 \ln x \Big _1^e - x^2 \Big _1^e =$	3p
	$= 2e^2 - 0 - e^2 + 1 = e^2 + 1$	2p
c)	$F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = f'(x), x \in (0, +\infty)$	2p
	$\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} f(x) f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big _1^{\sqrt{e}} = \frac{(3e+2)^2 - 3^2}{2} = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$	3p

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_{șt-nat}*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2(1+i) - i(2-i) = 1$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 10$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(2a, a)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2 + 2} = 2x$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre, se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 5p** 5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu măsura unghiului B egală cu $\frac{\pi}{6}$ și $BC = 24$. Bisectoarea unghiului C al triunghiului ABC intersectează latura AB în punctul D . Determinați lungimea segmentului CD .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & -1 & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 3$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $A(0) \cdot A(x) = A(0)$.
- 5p** c) Determinați numerele reale a și b pentru care $(A(1))^{-1} = aA(1) + bI_3$, unde $(A(1))^{-1}$ este inversa matricei $A(1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y - 1 + 2^{xy}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 2 = 8$.
- 5p** b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Determinați numărul natural nenul n pentru care $n * \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1+\ln x}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $\frac{\ln y}{y} - \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, pentru orice $x, y \in (1, +\infty)$ cu $x < y$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_3^5 (f(x) - x^3) dx = 8$.

- 5p** b) Arătați că $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x) - x + 2} dx = \frac{\ln 5}{3}$.
- 5p** c) Se consideră funcția $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Arătați că orice primitivă $G : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției g este concavă.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2(1+i) - i(2-i) = 2 + 2i - 2i + i^2 = 2 - 1 = 1$	3p 2p
2.	$f(2a) = a \Leftrightarrow 6a + 10 = a$ $a = -2$	3p 2p
3.	$2x^2 + 2 = 4x^2$, de unde obținem $x^2 - 1 = 0$ $x = -1$, care nu convine; $x = 1$, care convine	2p 3p
4.	Cifra unităților se poate alege în două moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei unităților și a cifrei zecilor, cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ de numere	2p 3p
5.	$\frac{a}{1} = \frac{a-1}{2}$ $a = -1$	3p 2p
6.	$AC = 12$; $\sphericalangle ACD = \frac{\pi}{6}$ $\frac{AC}{CD} = \cos \frac{\pi}{6}$, de unde obținem $CD = 8\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \cdot 2 = 4 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = 3$	3p 2p
b)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A(0) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & -x-2 & x+2 \\ 0 & 0 & 0 \\ x+2 & -x-2 & x+2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $x = -1$	3p 2p
c)	$(A(1))^{-1} = aA(1) + bI_3 \Leftrightarrow aA(1) \cdot A(1) + bA(1) = I_3$ și $A(1) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\begin{pmatrix} 5a+2b & -4a-b & 4a+b \\ 0 & a+b & 0 \\ 4a+b & -4a-b & 5a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a = -\frac{1}{3}$ și $b = \frac{4}{3}$	3p 2p

2.a)	$1 * 2 = 1 \cdot 2 + 1 + 2 - 1 + 2^{1 \cdot 2} =$ $= 4 + 4 = 8$	3p 2p
b)	$x * 0 = x \cdot 0 + x + 0 - 1 + 2^{x \cdot 0} = x$, pentru orice număr real x $0 * x = 0 \cdot x + 0 + x - 1 + 2^{0 \cdot x} = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”	2p 3p
c)	$n * \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{2n^2 - 3n - 2}{2n}$, pentru orice număr natural nenul n $\frac{2n^2 - 3n - 2}{2n} = 0 \Rightarrow 2n^2 - 3n - 2 = 0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\left(2 + \frac{1}{x}\right) \cdot x - (2x + 1 + \ln x)}{x^2} =$ $= \frac{2x + 1 - 2x - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$ Ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y = 2$	3p 2p
c)	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$ $1 < x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, deci $\frac{\ln y}{y} - \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, pentru orice $x, y \in (1, +\infty)$ cu $x < y$	2p 3p
2.a)	$\int_3^5 (f(x) - x^3) dx = \int_3^5 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _3^5 =$ $= \frac{25}{2} - \frac{9}{2} = 8$	3p 2p
b)	$\int_0^2 \frac{x^2}{f(x) - x + 2} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{x^3 + 2} dx = \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{(x^3 + 2)'}{x^3 + 2} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 2) \Big _0^2 =$ $= \frac{\ln 10}{3} - \frac{\ln 2}{3} = \frac{\ln 5}{3}$	3p 2p
c)	$g(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ și $G'(x) = g(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci $G''(x) = (-x^2 + 2x - 1)e^{-x}$ $G''(x) = -(x - 1)^2 e^{-x} \leq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția G este concavă	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)=2$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=1-a$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2+4)=\log_4(6x-4)$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale de două cifre, cu cifra zecilor număr impar, se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-5)$ și $B(5,5)$. Determinați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului AB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AC=6$ și $\operatorname{tg} C=\sqrt{3}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix} 1-a & a \\ -3a & 3a+1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2))=5$.
- 5p** b) Arătați că $A(a)-I_2=a(A(1)-I_2)$, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Determinați numărul întreg m pentru care $A(m) \cdot A(2m)=A(1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - x - y + 4$.
- 5p** a) Arătați că $0 \circ 3 = 1$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x = 3x$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , știind că $x \circ a = x + a$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2+2x-2)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x)=e^x(x^2+4x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}=1$.
- 5p** c) Demonstrați că $e^{x+4}(x^2+2x-2) \leq 6$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x)-\frac{3}{x}\right) dx = \frac{15}{4}$.
- 5p** b) Demonstrați că orice primitivă $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.
- 5p** c) Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{f(x)} dx = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)=(\sqrt{6})^2-2^2=$ $=6-4=2$	3p 2p
2.	$a^2+1=1-a$, deci $a^2+a=0$ $a=-1$ sau $a=0$	3p 2p
3.	$x^2+4=6x-4$, deci $x^2-6x+8=0$ $x=2$ sau $x=4$, care convin	3p 2p
4.	Cifra zecilor se poate alege în 3 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 5 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 5 = 15$ numere	2p 3p
5.	$x_M = 3$ și $y_M = 0$, unde M este mijlocul segmentului AB $OM = 3$	3p 2p
6.	$\operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = 6\sqrt{3}$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 7 - 2 \cdot (-6) =$ $= -7 + 12 = 5$	3p 2p
b)	$A(a) - I_2 = \begin{pmatrix} -a & a \\ -3a & 3a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow a(A(1) - I_2) = a \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, deci $A(a) - I_2 = a(A(1) - I_2)$, pentru orice număr real a	2p 3p
c)	$A(m) \cdot A(2m) = A(4m^2 + 3m)$, pentru orice număr întreg m $A(4m^2 + 3m) = A(1)$ și, cum m este număr întreg, obținem $m = -1$	3p 2p
2.a)	$0 \circ 3 = 0 \cdot 3 - 0 - 3 + 4 =$ $= 0 - 3 + 4 = 1$	3p 2p
b)	$x \circ x = x^2 - 2x + 4$, pentru orice număr real x $x^2 - 2x + 4 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$, de unde obținem $x = 1$ sau $x = 4$	2p 3p
c)	$xa - x - a + 4 = x + a \Leftrightarrow xa - 2x - 2a + 4 = 0$, pentru orice număr real x $x(a - 2) - 2a + 4 = 0$ și, cum egalitatea are loc pentru orice număr real x , obținem $a = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 2) + e^x(2x + 2) =$ $= e^x(x^2 + 2x - 2 + 2x + 2) = e^x(x^2 + 4x), \quad x \in \mathbb{R}$	3p
		2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(x^2 + 2x - 2)}{e^x(x^2 + 4x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 + 4x} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{4}{x}} = 1$	2p
		3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ sau } x = 0$; pentru $x \in (-\infty, -4] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -4]$ și, pentru $x \in [-4, 0] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-4, 0]$ $f(x) \leq f(-4)$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$ și $f(-4) = \frac{6}{e^4}$, deci $e^{x+4}(x^2 + 2x - 2) \leq 6$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$	2p
		3p
2.a)	$\int_1^2 \left(f(x) - \frac{3}{x}\right) dx = \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _1^2 =$ $= \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$	3p
		2p
b)	G este o primitivă a funcției $g \Rightarrow G'(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(x^3 + \frac{3}{x}\right), \quad x \in (0, +\infty)$ $\frac{1}{\sqrt{x}} \left(x^3 + \frac{3}{x}\right) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția G este crescătoare	2p
		3p
c)	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{f(x)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^4 + 3} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^2)'}{(x^2)^2 + 3} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{3}} \Big _1^{\sqrt{3}} =$ $= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$	3p
		2p